ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА:
ЧАСТЬ 4. СТАТИСТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ

Практикум для вузов

Составители:
В.И. Кукуев,
В.В. Чернышев,
И.А.Попова.

ВОРОНЕЖ
2009

Утверждено научно-методическим советом физического факультета
17 февраля 2006 года, протокол № 2.

Практикум подготовлен на кафедре общей физики физического факультета Воронежского государственного университета.
Рекомендуется для студентов физического факультета 1 курса д/о и 2 курса в/о. Для специальностей: 010701 (010400) – Физика, 010803 (014100) – Микроэлектроника и полупроводниковые приборы, 010801 (013800) – Радиофизика и электроника.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
МЛ-4/1

ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНА НОРМАЛЬНОГО (ГАУССОВА) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН НА МЕХАНИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГАЛЬТОНА

Цель работы – изучение закона нормального (гауссова) распределения случайных величин.

ВВЕДЕНИЕ

В природе и повседневной жизни приходиться часто встречаться с явлениями, результат которых с достоверностью заранее предсказать нельзя, так как на них оказывает влияние большое число нерегулярных, носящих случайный характер факторов. Примерами могут служить движение молекул газа, измерение физических величин, стрельба в цель, бросание игральной кости и т.д. Такие явления называют *случайными.* Случайные явления описываются методами теории вероятностей. Рассматривая единичное случайное событие, мы не можем установить никаких закономерностей, характеризующих данное явление. Однако большая совокупность случайных событий подчиняется некоторым законам, которые называются *статистическими законами*. При помощи таких законов можно определять вероятность, с которой осуществляется данное событие в серии однотипных случайных событий, вычислять средние значения величин в серии измерений и т.п.

Для случайных величин, изменяющихся непрерывно, наиболее распространенным статистическим законом является закон *нормального, или гауссова, распределения*. Гауссово распределение имеет место в том случае, когда при большом числе наблюдений с равной вероятностью осуществляются положительные и отрицательные отклонения случайной величины от некоторого (наиболее вероятного) ее значения, причем малые отклонения более вероятны, чем большие. Примером нормального распределения может служить распределение случайных погрешностей при измерении физических величин, распределение молекул в идеальном газе по компонентам скоростей и т.д.

Пусть производится серия n измерений некоторой физической величины. Случайные погрешности результатов этих измерений обозначим a_1 , a_2 , ... , a_n . Число dn случайных погрешностей, величина которых лежит в некотором малом интервале $[a,\ a + \mathrm{d}a]$, должно быть пропорционально полному числу измерений n и длине интервала $\mathrm{d}a$. Кроме того, оно зависит по некоторому закону $f(a)$ от самой величины погрешности:

$$\mathrm{d}n = n\, f(a)\, \mathrm{d}a\ . \qquad (1)$$

Зависимость $f(a)$, заданная в явном виде, называется *законом распределения* случайных погрешностей.

Отношение $\mathrm{d}n/n$ имеет смысл вероятности того, что величина погрешности отдельного измерения из этой серии лежит в некотором малом интервале $[a,\ a + \mathrm{d}a]$ около заданного значения.

Из (1) следует, что $f(a) = \mathrm{d}n/n\mathrm{d}a$, следовательно, функция $f(a)$ численно равна вероятности получить погрешность, заключенную в единичном интервале $\mathrm{d}a = 1$ около заданного значения a. Поэтому ее называют *плотностью вероятности.*

В соответствии со сказанным выше функция $f(a)$ для гауссова распределения должна быть четной, а, следовательно, зависеть от модуля погрешности, или, что то же самое, от квадрата ее величины. Она должна убывать при возрастании $|a|$. В теории вероятностей показано, что для гауссова распределения $f(a)$ имеет вид:

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\ . \qquad (2)$$

Величина σ^2, входящая в формулу (2), постоянна для данной серии измерений и называется *дисперсией отдельного измерения*. Как показывает теория, дисперсия равна:

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^2\ . \qquad (3)$$

На рис. 1 изображены графики функции Гаусса (2) при различных значениях σ.

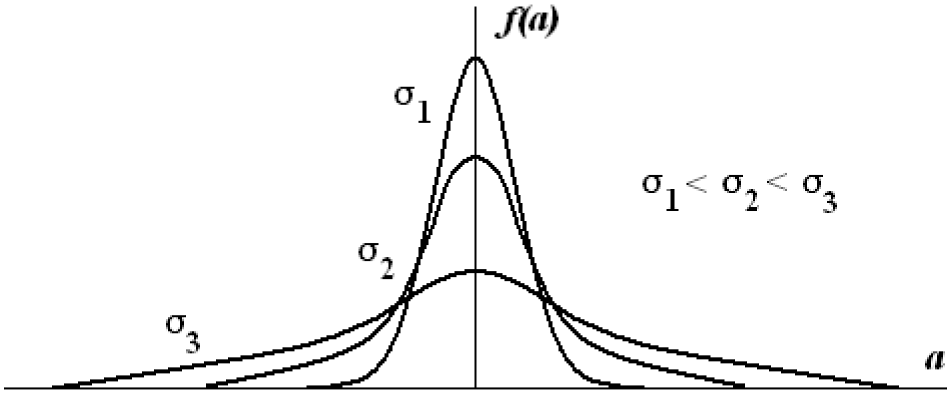

Рис. 1. Гауссово распределение вероятностей случайных погрешностей.

Из рис. 1 и формулы (3) видно, что дисперсия характеризует случайный разброс данного ряда измерений относительно истинного значения. При ограниченном числе наблюдений приближенной оценкой дисперсии может служить так называемая *выборочная дисперсия*, вычисленная по некоторому «выбранному» конечному числу измерений:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,. \qquad (4)$$

ЭКСПЕРИМЕНТ

Приборы и принадлежности: установка, набор шариков.

Закон нормального распределения хорошо подтверждается экспериментом. В данной работе изучение этого закона проводится на механической модели, воспроизводящей картину случайных отклонений от среднего положения маленьких металлических шариков, рассеиваемых с равной вероятностью вправо и влево большим числом металлических призм. Прибор (рис. 2) состоит из воронки 1, рассеивающих призм 2, ящика 3 с узкими ячейками, имеющими прозрачные стенки из плексигласа, выдвижным дном 4 и коробки 5, расположенной в основании прибора.

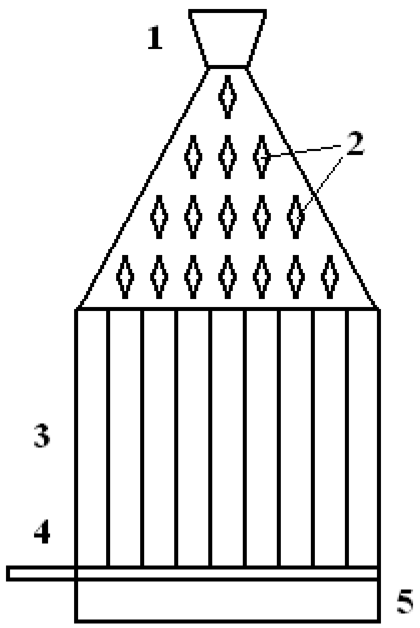

Рис. 2. Механическая модель Гальтона для изучения случайных процессов.

Через отверстие воронки высыпается большое число n мелких шариков. В результате рассеивания на призмах 2 они случайным образом распределяются по ячейкам установки. Ширину ячейки Δx примем за интервал, равный единице измерений: $\Delta x = 1$. Тогда величина отклонения шарика от центральной стенки ($x = 0$) до ячейки, в которую попал шарик, будет равна номеру ячейки. Выдвигая дно 4 ящика так, чтобы в коробку 5 каждый раз высыпались шарики только из одной ячейки, можно подсчитать числа n_k шариков в каждой ячейке, здесь $k = 1, 2, \ldots, 8$ в положительном направлении оси X и k = -1, -2, …, -8 – в отрицательном направлении оси X. Так как $\Delta x = 1$, отношение $y_k = n_k / n$ равно плотности вероятности попадания шарика в k-ю ячейку. Другими словами, оно совпадает со значением функции Гаусса для этой ячейки.

Задание 1. Построение экспериментальной кривой распределения случайных отклонений рассеянных шариков.

1. Через отверстие воронки высыпать шарики в установку, наблюдая картину их распределения.
2. Подсчитать число шариков n_k в каждой ячейке установки. Для этого выдвинуть дно ящика (рис.2) установки на ширину одной ячейки, чтобы шарики высыпались в коробку. Снять ящик с коробки, подсчитать число шариков n_k, высыпая их в стакан. Результаты измерений записать в таблицу.

Таблица

x, условных единиц	ЭКСПЕРИМЕНТ			ТЕОРИЯ	
	n_k	y_k	$y_k \cdot 100$	$y(x)$	$y(x) \cdot 100$
-8					
-7					
-6					
-5					
-4					
-3					
-2					
-1					
1					
2					
3					
4					
5					
6					
7					
8					

3. Найти общее число шариков $n = \Sigma\, n_k$.
4. Вычислить отношения $y_k = n_k / n$ для каждой ячейки, занести в таблицу.
5. На миллиметровой бумаге построить график распределения случайных отклонений шариков. По горизонтальной оси откладываются отклонения x в условных единицах, по вертикальной – значения $y_k \cdot 100$. Линия графика должна представлять собой плавную кривую. Она проводится таким образом, чтобы примерно одинаковое число точек находилось по одну и другую сторону графика.
6. Вычислить выборочную дисперсию по формуле:

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=-8}^{8} n_k x_k^2 \ .$$

Задание 2. Построение теоретической кривой распределения случайных отклонений шариков.

1. Пользуясь вычисленным значением дисперсии, для всех значений x от -8 до 8 рассчитать соответствующие значения функции Гаусса

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}) \ .$$

   Результаты записать в таблицу.
2. На одном листе с экспериментальным графиком изобразить другим цветом теоретическую кривую, откладывая по осям координат значения x и $y(x) \cdot 100$.
3. Сравнить теоретическую и экспериментальную кривые, сделать выводы.

ВНИМАНИЕ! Шарики не рассыпать, работать с ними аккуратно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сквайрс Дж. Практическая физика. – М., 1971. 246 с.
2. Кассандрова О. Н., Лебедев В. В. Обработка результатов наблюдений. -М., 1970. – 104с.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Понятие случайного явления, вероятности случайного явления, статистического закона.
2. Для каких случайных величин справедлив нормальный закон распределения?
3. Что такое плотность вероятности?
4. Гауссов закон распределения вероятностей случайных погрешностей.
5. Понятие дисперсии. Как практически оценивается дисперсия для конечного числа измерений?
6. Экспериментальная проверка закона нормального распределения случайных погрешностей на механической модели Гальтона.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА
МЛ-4/2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ И СРЕДНЕЙ ДЛИНЫ СВОБОДНОГО ПРОБЕГА МОЛЕКУЛ ВОЗДУХА

Цель работы – измерение коэффициента внутреннего трения и средней длины свободного пробега молекул воздуха капиллярным вискозиметром.

ВВЕДЕНИЕ

Если истечение газа совершается через достаточно короткий капилляр, то разность давлений на его концах невелика, и тогда плотность газа вдоль оси капилляра остается практически неизменной. Поэтому газ можно считать несжимаемым, и, следовательно, можно применить закон Пуазейля для ламинарного течения жидкости по трубам (капиллярам):

$$\mathbf{V} = \frac{\pi R^4}{8L\eta}\Delta P \cdot t \ , \qquad (1)$$

где **V** – объем газа, протекающий через капилляр длиной L, радиуса R за время t, ΔP – разность давлений на концах капилляра, η – коэффициент внутреннего трения газа.

Из формулы Пуазейля (1) можно определить коэффициент внутреннего трения воздуха:

$$\eta = \frac{\pi R^4}{8L\mathbf{V}}\Delta P \cdot t \ . \qquad (2)$$

С другой стороны, в молекулярно-кинетической теории выражение для коэффициента внутреннего трения газа имеет вид:

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle V\rangle \cdot \langle\lambda\rangle \ , \qquad (3)$$

где ρ – плотность газа, $<V>$ – средняя скорость теплового движения молекул, $<\lambda>$ – средняя длина свободного пробега молекул газа. Из (3) можно найти длину свободного пробега молекул газа (воздуха):

$$\langle\lambda\rangle = \frac{3\eta}{\rho\langle V\rangle} \ . \qquad (4)$$

Имея в виду, что согласно молекулярно-кинетической теории $\langle V\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$, а плотность ρ, вычисленная из уравнения Менделеева-Клапейрона, равна $\rho = \frac{P\mu}{RT}$, получим выражение для $<\lambda>$:

$$\langle\lambda\rangle = 1{,}88\frac{\eta}{P}\sqrt{\frac{RT}{\mu}} \ . \qquad (5)$$

Здесь μ – молярная масса воздуха, R – универсальная газовая постоянная, P – атмосферное давление, T – температура окружающего воздуха.

ОПИСАНИЕ УСТАНОВКИ

Приборы и принадлежности: установка, воронка, сосуд для воды, секундомер, термометр, барометр.

Установка, изображенная на рис.1, состоит из капилляра (1), спиртового манометра (2), сосуда с краном (аспиратора) для воды (3), стеклянных трубок с расширениями (4), осушительной склянки (5).

Из сосуда (3) при открытом кране (6) вытекает вода и в нем создается разрежение. За счет перепада давления на концах капилляра через него протекает поток воздуха из атмосферы через осушительную склянку (5). При этом объем **V** воздуха, прошедший через капилляр за время t, равен объему вытекающей из аспиратора воды, если разность давлений ΔP, измеренная по манометру, остается неизменной (стационарное течение). Длина капилляра L и его радиус R заданы. Объем **V** вытекающей воды измеряется по шкале на сосуде (3).

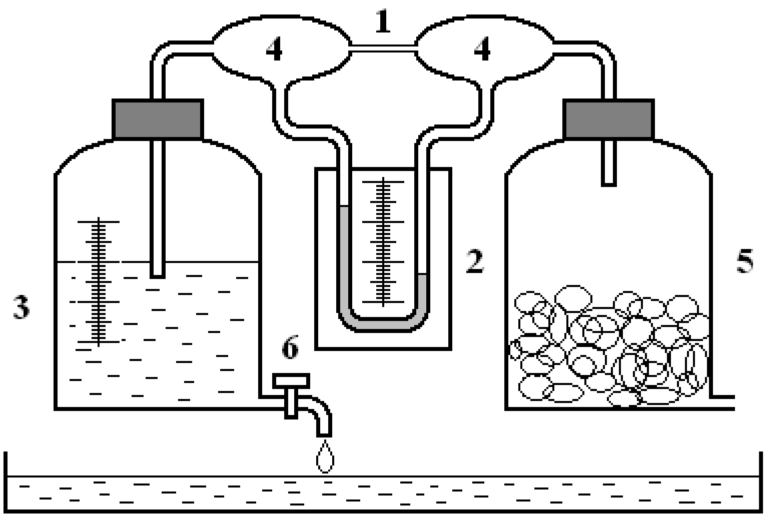

Рис. 1. Установка для измерения коэффициента внутреннего трения и средней длины свободного пробега молекул воздуха.

Задание 1. Измерение коэффициента внутреннего трения.

1. Наполнить сосуд (3) водой.
2. Открыть кран (6). Через некоторый промежуток времени установится стационарное истечение воды (разность уровней жидкости в манометре будет неизменной).
3. Измерить секундомером время истечения заданного объема **V** воды.
4. Измерить разность высот H жидкости в коленах спиртового манометра.
5. Вычислить разность давлений ΔP по формуле $\Delta P = \rho g H$, где ρ – плотность спирта в манометре (ρ = 800 кг/м^3), g – ускорение свободного падения.
6. Вычислить коэффициент внутреннего трения по формуле (2).
7. Опыт повторить 10 раз. Скорость истечения жидкости из аспиратора в разных опытах может быть различной. Результаты измерений и вычислений записать в таблицу.

Таблица

V = … (по заданию)				
№	t, с	H, мм	ΔP, Па	η, Па·с

8. Вычислить среднее значение η и его погрешность. Представить результат совместно с погрешностью.

Примечания:

1. Скорость истечения воды следует устанавливать такой, чтобы разность высот H была не слишком мала (большие погрешности измерений) и не очень велика (течение воздуха через капилляр перестает быть ламинарным). Оптимальные значения H – 3÷5 см.
2. Во время вытекания достаточно большого объема жидкости первоначальная разность высот в коленах манометра закономерно уменьшается. Следует поддерживать ее постоянной в течение всего опыта, регулируя скорость истечения при помощи крана (6).

Задание 2. Измерение средней длины свободного пробега молекул воздуха.

1. Измерить атмосферное давление P по барометру и температуру T воздуха термометром.
2. Вычислить $<\lambda>$ молекул воздуха по формуле (5).
3. Результат для средней длины свободного пробега молекул воздуха представить с указанием погрешности. Сформулировать выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кикоин А.К., Кикоин И.К. Молекулярная физика – М., 1976.- с. 135-139, 171-180.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики, - М., 1979.- с. 326-329, 338-342.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Средняя длина свободного пробега молекул газа, основная формула, зависимость от параметров состояния газа.
2. Внутреннее трение в газах, формула Ньютона.
3. Коэффициент внутреннего трения, его физический смысл, размерность, зависимость от параметров состояния газа.
4. Формула Пуазейля.
5. Устройство капиллярного вискозиметра, ход работы, особенности метода. Обработка результатов измерений.