МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Математическая обработка результатов измерений в лабораторном практикуме по курсу общей физики

Учебно-методическое пособие

Составители:

О.М. Голицына,
А.В. Меремьянин,
В.Е. Рисин

Воронеж
Издательский дом ВГУ
2015

Утверждено научно-методическим Советом физического факультета 29 октября 2015 г., протокол №7

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, доцент С.И.填 Мармо

Подготовлено на кафедре общей физики физического факультета Воронежского государственного университета

Рекомендовано студентам 1-2 курса очной и 1-3 курса очно-заочной формы обучения физического факультета

Для направлений: 03.03.03 – Радиофизика и электроника,
03.03.02 – Физика,
11.03.02 – Электроника и наноэлектроника,
14.03.02 – Ядерные физика и технологии

Цель данного учебно-методического пособия – помочь студентам освоить приёмы обработки результатов измерений в лабораторном практикуме по курсу общей физики. Изложен минимум теоретического материала по методам расчёта погрешностей измерений и представления результатов измерений. Даны примеры расчёта погрешностей при прямых и при косвенных измерениях, рекомендации по построению графиков и округлению результатов измерений. Изложены основы метода наименьших квадратов, позволяющего наиболее эффективно определять параметры функциональных зависимостей по результатам измерений. Приведена таблица коэффициентов Стьюдента, которые необходимы при расчёте случайных погрешностей измерений.

1. Погрешности измерений

Цель эксперимента – установить истинное значение интересующего нас физического параметра (температуры, ускорения, электрического сопротивления и т. д.). Однако при всяком измерении мы получаем не истинное, а приближенное значение измеряемой величины. Это происходит потому, что наши приборы и методики измерений неидеальны, а исследуемые явления существуют не изолированно; они связаны с множеством других явлений и, поэтому, в процессе измерения на объект исследований и измерительный прибор действует множество факторов, искажающих результат.

Отклонения результатов измерений от истинных значений носят название *погрешностей измерений.* Абсолютной погрешностью измерений Δx называют модуль разности между истинным значением X физической величины и результатом его измерения x: $\Delta x = |X - x|$. Часто пользуются также относительной погрешностью:

$$E = \frac{\Delta x}{X} \cdot 100\%.$$

Как правило, истинное значение физической величины X неизвестно (кроме контрольных, калибровочных опытов, когда измеряют эталон; так поступают при поверке измерительных приборов и установленную таким образом погрешность указывают в паспорте прибора). Обычно, в рядовых измерениях относительную погрешность вычисляют по формуле:

$$E = \frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%.$$

Погрешности характеризуют точность измерений (показывают, насколько близок результат измерений к истинному значению). Их необходимо указывать, чтобы правильно использовать результаты измерений. Данные измерений записывают в виде:

$$X = x \pm \Delta x, \quad \text{либо:} \quad X = x \quad \text{при} \quad E = \dots .$$

Эти записи означают, что истинное значение X измеряемой физической величины лежит в интервале $x - \Delta x \leq X \leq x + \Delta x$. Чем меньше погрешность, тем выше точность измерений, выше доверие к таким измерениям.

Погрешности делятся на **промахи, систематические и случайные погрешности**.

Промахами называют чрезмерно большие погрешности, когда результат явно не соответствует ожидаемому значению измеряемой величины. Промахи обычно обусловлены неправильным отсчётом по прибору, ошибкой при записи наблюдений, влиянием сильной внешней помехи, сбоем в работе аппаратуры. Результаты, содержащие промахи, должны быть исключены. *После проведения измерений в лабораторном практикуме студенты должны показать свои результаты преподавателю и тот, на основании своего опыта и знаний, поможет опознать и исключить промахи.*

Систематическими называют погрешности, величина и знак которых подчиняются определённым зависимостям (правильно повторяются или изменяются по определённому закону). Систематические погрешности обусловлены неидеальностью приборов, недостатками методики измерений, действием различных внешних факторов, искажающих результаты измерений.

Приведём два примера появления систематических погрешностей:

1. При измерении вязкости жидкостей температура жидкости не фиксируется и не контролируется.

2. Контактная разность потенциалов, возникающая между электродами из различных металлов, может исказить результат измерения э.д.с. источника.

Природа и характер систематических погрешностей зачастую известны. В принципе систематические погрешности могут быть выявлены и исключены, но это связано с усложнением приборов, увеличением их стоимости и увеличением времени измерений.

Существуют общие правила и приёмы устранения систематических погрешностей. Они достаточно очевидны. Следует использовать исправную и поверенную аппаратуру, измерительные приборы должны работать в условиях, предусмотренных ТУ (*Технические Условия* – указываются в паспорте прибора).

Хороший эффект дают стабилизация напряжения электропитания и температуры, применение защитных экранов и фильтров. Выявлению систематических погрешностей способствует проведение контрольных, калибровочных измерений.

Лабораторные работы практикума по курсам общей физики спроектированы и поставлены опытными экспериментаторами. Методики измерений построены таким образом, чтобы обеспечить минимальные систематические погрешности измерений. В соответствующих методических указаниях предлагается оптимальный порядок проведения измерений, указаны погрешности измерений для используемых приборов.

Случайными называют погрешности, изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях. Природа случайных погрешностей либо неизвестна, либо связана со случайным характером самого исследуемого явления (число испускаемых фотоэлектронов, число радиоактивных распадов в единицу времени). К случайным относят и погрешности, для которых не установлены причины (факторы), влияющие на разброс результатов при повторных измерениях. Поэтому деление погрешностей на систематические и случайные иногда зависит от степени изученности объекта.

Когда говорят о причинах возникновения систематических или случайных погрешностей, часто используют понятия существенных (но не случайных) и несущественных факторов возникновения погрешностей. Каждый существенный фактор способен заметно изменить результат измерений. Действие таких факторов приводит к возникновению систематических погрешностей. Эти факторы могут быть выявлены и устранены или их влияние учтено (хотя иногда сделать это довольно сложно и дорого).

Несущественные факторы в одиночку не способны заметно изменить результат измерений. Однако случайная комбинация большого количества несущественных факторов приводит к появлению случайных погрешностей $\Delta x_{\text{сл}}$. Понятно, что такие погрешности невозможно устранить. Тем не менее, проведение серий измерений и правильная обработка результатов измерений позволяют уменьшить влияние случайных погрешностей на результат измерений и оценить величину таких погрешностей.

2. Расчёт случайных погрешностей

Предположим, что все систематические погрешности выявлены и устранены. Если измерительные приборы достаточно чувствительны, то проводя серию измерений можно обнаружить случайный разброс результатов измерений. Таким образом, в общем случае результат измерений x является случайной величиной.

Случайные величины, взятые в совокупности, подчиняются определённым законам, которые рассматривает теория вероятностей. Обработка результатов измерений основывается на вероятностном подходе (теории вероятностей) и ряде постулатов математической статистики, которые хорошо оправдывают себя на практике.

Чтобы охарактеризовать случайную величину надо указать, какие значения она может принимать.

Кроме того необходимо указать, как часто, т. е. с какой вероятностью случайная величина может принимать те или иные значения – т. е. задать *распределение* случайной величины.

Комбинация большой совокупности несущественных факторов, сравнимых по величине воздействий на объект исследований и измерительный прибор, приводит к тому, что в экспериментальной физике реализуется так называемое распределение Гаусса. В этом случае результаты измерений x симметрично рассеяны относительно X как в сторону бóльших, так и меньших значений X. Причём с ростом величины отклонения $|X - x|$ вероятность отклонения быстро уменьшается.

Среднее арифметическое серии n измерений $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

подвержено гораздо меньшему случайному разбросу, чем отдельные измерения. (То есть, если проводить серии измерений в одинаковых условиях и каждый раз вычислять $\bar{x}$, то разброс средних значений будет гораздо меньше разброса отдельных измерений.) В теории вероятностей показано, что $\bar{x}$ является наилучшей оценкой истинного значения параметра X. Поэтому рекомендуется проводить серии n измерений и вычислять $\bar{x}$.

Случайный разброс среднего значения $\bar{x}$ относительно истинного значения X физического параметра принято характеризовать величиной [1]

$$s = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}.$$

Однако случайная погрешность измерений определяется не

Таблица 1

Значения коэффициентов Стьюдента $t_{p,n}$

n	p = 0,90	p=0,95	n	p=0,90	p=0,95
4	2,35	3,18	10	1,83	2,26
5	2,13	2,78	11	1,81	2,23
6	2,01	2,57	12	1,80	2,20
7	1,94	2,45	13	1,78	2,18
8	1,89	2,36	14	1,77	2,16
9	1,86	2,31	15	1,76	2,14

только величиной s, но и зависит также от вероятности p, с которой истинное значение X должно попадать в интервал

$$\bar{x} - \Delta x_{\text{сл}} \leq X \leq \bar{x} + \Delta x_{\text{сл}}. \tag{1}$$

Эту вероятность необходимо *задавать заранее*. Затем по таблицам математической статистики определяют так называемые *коэффициенты Стьюдента* $t_{p,n}$, зависящие от выбранного уровня вероятности p и числа измерений n.

Случайная погрешность измерений определяется произведением:

$$\Delta x_{\text{сл}} = s \cdot t_{p,n}.$$

Результат обработки измерений следует записывать в виде:

$$X = \bar{x} \pm \Delta x_{\text{сл}} \quad \text{с вероятностью} \quad p = \ldots \tag{2}$$

Здесь p называют доверительной вероятностью или надёжностью оценки (2).

В таблице 1 приведены значения коэффициентов Стьюдента для различных значений n и наиболее часто используемых значений p.

Допустим, $\bar{x} = 19,65$; $s = 0,41$; $n = 6$. Задаём вероятность $p = 0,95$ и по таблице находим коэффициент Стьюдента $t_{p=0,95;\,n=6} = 2,57$.

Вычисляем случайную погрешность: $\Delta x_{\text{сл}} = 0,41 \cdot 2,57 = 1,05$. Результат записываем следующим образом:

$$X = 19,65 \pm 1,05 \quad \text{с вероятностью} \quad p = 0,95.$$

При $p < 1$ получаемые оценки X могут оказаться неверными, т. е. истинное значение измеряемого физического параметра может лежать вне интервала (1). Вероятность такого события равна $\alpha = 1 - p$. Абсолютно достоверную оценку можно получить лишь при $p = 1$, но коэффициенты Стьюдента при $p \to 1$ быстро возрастают и стремятся к бесконечности. Такая оценка никому не нужна. Поэтому приходится ограничиваться вероятностями p, слабо отличающимися от единицы. Многолетняя практика показывает разумность таких оценок. Вероятностные оценки типа (1), (2) – это расплата за недостаток информации. Отметим, что если число измерений $n \to \infty$, то $\bar{x} \to X$.

3. Суммирование погрешностей

Как правило, при проведении эксперимента появляются и систематические и случайные погрешности измерений. Возникает задача суммирования этих погрешностей для получения итоговой оценки. Однако учёт систематических и случайных погрешностей различен в принципе.

Действительно, если мы имеем дело с систематическими погрешностями, то истинное значение измеряемого параметра обязательно лежит в интервале $\bar{x} - \Delta x_{\text{сист}} \leq X \leq \bar{x} + \Delta x_{\text{сист}}$.

Если же речь идёт только о случайных погрешностях, то неравенство $\bar{x} - \Delta x_{\text{сл}} \leq X \leq \bar{x} + \Delta x_{\text{сл}}$ выполняется с вероятностью $p < 1$, которую мы сами задаём.

Поэтому лучше всего сначала сравнить $\Delta x_{\text{сист}}$ и $\Delta x_{\text{сл}}$. Если одна из них хотя бы в 2 раза меньше другой, то меньшую погрешность можно просто не учитывать.

Для уменьшения $\Delta x_{\text{сл}}$ можно использовать более точные приборы, улучшить методику измерений. Для уменьшения

$\Delta x_{\text{сист}}$ можно увеличить число измерений n. Можно и наоборот, увеличить $\Delta x_{\text{сл}}$ за счёт увеличения доверительной вероятности p. Однако не стоит уменьшать доверительную вероятность p, чтобы за счёт этого уменьшить $\Delta x_{\text{сл}}$, т.к. надёжность оценки станет низкой.

В крайнем случае, суммарную погрешность Δx можно рассчитать по формуле (учитывая, что систематическая и случайная погрешности не зависят друг от друга):

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{\text{сл}})^2 + (\Delta x_{\text{сист}})^2}.$$

Тогда результат запишется в виде $X = \bar{x} \pm \Delta x$. Вероятность выполнения неравенства $\bar{x} - \Delta x \le X \le \bar{x} + \Delta x$ в этом случае будет не меньше той, что выбрана при расчёте $\Delta x_{\text{сист}}$.

4. Округление результата измерений

По результатам измерений мы можем найти не истинное, а лишь приближенное значение измеряемой физической величины X. Поэтому нет смысла производить чрезмерно точные вычисления $\bar{x}$ и Δx. Это самообман, кажущаяся точность. Следует округлять результаты.

При округлении указывают цифры в *гарантируемых* разрядах, а также только в одном или двух старших сомнительных разрядах. Остальные цифры либо отбрасывают, если это дробные разряды, либо заменяют нулями, если это разряды, бóльшие единицы (цифры до запятой в десятичном представлении числа).

Округление начинают с погрешности. Для правильного округления Δx необходимо знать её погрешность. Относительная погрешность погрешности E может быть оценена по формуле [1]:

$$E = \frac{\delta}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{2n-1}}, \tag{3}$$

где δ – абсолютная погрешность погрешности Δx, n – число измерений.

Пример 1. Допустим, $\bar{x} = 13,24634$; $\Delta x = 1,34124$; $n = 6$. Тогда по формуле (3) получим $E = 0,3$. Отсюда $\delta = 0,3 \cdot 0,40237 \approx 0,40$. Следовательно, даже цифра в разряде единиц у Δx не гарантирована. Действительно, $0,94 \leq \Delta x \leq 1,74$. Поэтому при записи Δx оставляем цифры в двух старших сомнительных разрядах и записываем: $\Delta x = 1,3$.

При округлении $\bar{x}$ оставляют цифры только в тех сомнительных разрядах, которые оставлены у погрешности. Таким образом, окончательно запишем: $X = 13,2 \pm 1,3$.

Пример 2. $\bar{x} = 24364,5218$; $\Delta x = 1234,1236$; $n = 12$. Вычисляем $E = 0,2$ и $\delta = 246,8$. В этом случае у погрешности Δx не гарантируется цифра даже в самом старшем разряде – разряде тысяч. Поэтому оставляем цифры в двух старших сомнительных разрядах, остальные целые заменяем нулями (с соответствующим округлением), а дробную часть отбрасываем. Таким образом, $\Delta x = 1200$. Тогда $\bar{x} = 24400$ (в разряде десятков тысяч двойка гарантируется).

Окончательно запишем: $X = (24,4 \pm 1,2) \cdot 10^3$.

Обратите внимание, десятичный порядок $\bar{x}$ и его погрешности должен быть одинаковым. Не следует записывать результат в виде:

$$X = (3,387 \cdot 10^2 \pm 60,6) \text{ мм}$$

Надо записать: $X = (338,7 \pm 60,6)$ мм либо $X = (3,39 \pm 0,61) \cdot 10^2$ мм.

5. Погрешности косвенных измерений

Измерения бывают прямые и косвенные. *Прямыми* называют измерения, при которых значение физического параметра находят непосредственно из опыта, с помощью тех или иных приборов, регистрирующих этот параметр (измерение длины линейкой, времени секундомером, температуры термометром). Однако не всегда и не все физические параметры можно измерить непосредственно с помощью приборов. *Косвенными* называют измерения, когда исследуемый физический параметр вычисляется по известной формуле, связывающей этот параметр с данными прямых измерений других параметров (например, измерение плотности тела).

Допустим интересующий нас физический параметр L можно вычислить по формуле $L = f(X, Y, Z)$, где X, Y, $Z, \ldots$ – истинные значения физических параметров, которые не зависят друг от друга и измеряются непосредственно.

В результате прямых измерений можно установить:

$$X = \bar{x} \pm \Delta x, \quad Y = \bar{y} \pm \Delta y, \quad Z = \bar{z} \pm \Delta z, \ldots$$

Тогда наилучшей оценкой параметра L является

$$\bar{L} = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots).$$

Если погрешности прямых измерений Δx, Δy, Δz, $\ldots$ невелики, то оценку погрешности ΔL можно рассчитать по формуле

$$\Delta L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial X}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta z\right)^2 + \ldots},$$

где $\partial f/\partial X$ обозначает *частную производную* функции f по переменной X. (При вычислении частной производной по X параметры Y, Z и т.д. надо считать константами, см. пример ниже.)

Результат записывают в виде:

$$L = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) \pm \Delta L. \tag{4}$$

Если доверительные вероятности для погрешностей Δx, Δy, Δz, $\ldots$ выбраны одинаковыми, то такой же будет и доверительная вероятность оценки (4).

Приведём *пример* расчёта погрешности косвенных измерений.

Пусть физическая величина L определена формулой

$$L = \frac{X^2 Y}{Z},$$

где параметры X, Y, Z были определены в результате прямых измерений: $X = 13,26 \pm 0,66$; $Y = 50,10 \pm 3,51$; $Z = 4,33 \pm 0,26$.

Вычисляем среднее значение: $\bar{L} = (13,26)^2 \cdot 50,10/4,33 = 2034,40$.

Находим производные:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \frac{2XY}{Z}; \quad \frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{X^2}{Z}; \quad \frac{\partial f}{\partial Z} = -\frac{X^2Y}{Z^2}.$$

Так как истинные значения параметров X, Y, Z неизвестны, вместо них подставляем соответствующие средние значения, полученные в результате измерений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial X}\Delta x &= \frac{2 \cdot 13,26 \cdot 50,10}{4,33} \cdot 0.66 = 202,52;\\
\frac{\partial f}{\partial Y}\Delta y &= \frac{(13,26)^2}{4,33} \cdot 3,51 = 142,53;\\
\frac{\partial f}{\partial Z}\Delta z &= -\frac{(13,26)^2 \cdot 50,10}{(4,33)^2} \cdot 0,26 = -122,16.
\end{aligned}$$

Вычисляем погрешность

$$\Delta L = \sqrt{(202,52)^2 + (142,53)^2 + (122,16)^2} = 276,14.$$

Таким образом, можем записать: $L = 2034 \pm 276$.

6. Построение графиков

В ряде работ лабораторного практикума проводится исследование известных теоретических зависимостей. Например, исследование зависимости типа $Y = f(X)$. Для этого проводят измерения параметра Y при различных значениях X и затем, анализируя экспериментальные данные, строят графики в разных масштабах.

Графики дают наглядное представление о виде зависимости, о том, насколько результаты эксперимента согласуются с теорией. По графику можно оценить параметры функциональной зависимости $f(X)$. Например, если зависимость Y от X линейна, т.е. $Y = aX + b$, то можно сделать оценку коэффициентов a и b.

Правила построения графиков:

1. Графики строят на специальной миллиметровой бумаге.

2. График должен иметь название.

3. Оси координат должны быть поименованы, т.е. указана соответствующая физическая величина и её единица измерения.

4. По оси абсцисс принято откладывать значение независимого параметра (X), а по оси ординат – зависимого параметра (Y).

5. График должен быть удобен для изучения, поэтому он не должен быть слишком большим или слишком маленьким (ориентируйтесь на тетрадочный лист или его половину).

6. Результаты измерений на графике изображают в виде аккуратной точки достаточно заметного размера. При известных погрешностях Δx и Δy их откладывают от точки по вертикали и горизонтали, см. рис. 1.

7. Масштабы координат определяются минимальным и максимальным измеренными значениями параметра.

Приведём *пример выбора масштаба.*
Пусть в результате измерений получены следующие значения параметра Y: 500,34; 504,39; 509,91; 513,31; 518,29; 524,12; 529,48; 533,66; 541,10; 546,24; 550,89.

Минимальное значение приведённого ряда равно 500,34; максимальное – 550,89. Тогда за начало отсчёта разумно принять значение 500, а для последней метки на координатной оси следует взять значение 555. Делим разность $(555 - 500) = 55$ на

11 см (выбранный размер графика по оси Y). Получаем цену деления: 1 сантиметру соответствует 5 единиц параметра Y.

На осях координат ставят метки (не слишком часто) и указывают соответствующие значения единиц измерения параметра.

Удобно строить графики и затем их использовать, когда одному сантиметру или одному миллиметру бумаги соответствует 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, ... или, наоборот, ..., 0,01, 0,02, 0,05, 0,1, 0,2, 0,5 единиц исследуемого параметра.

Отметим, что если известна теоретическая зависимость, то её проводят на графике сплошной линией.

Пример графика приведён на рис. 1, где изображена зависимость периода колебаний математического маятника T от длины подвеса l. Для каждого значения l проводилась серия измерений. Точки обозначают средние значения периода в соответствующей серии. Погрешности измерения ΔT для каждой серии обозначены вертикальной чертой, проходящей через соответствующую точку.

7. Линеаризация зависимостей

При проверке теоретических зависимостей широко используется приём *линеаризации*, когда путём замены переменных переходят от некоторой произвольной зависимости $Y = f(X)$ к линейной зависимости $Y = aX + b$.

Рассмотрим *пример*.

Сопротивление R полупроводника с ростом его температуры изменяется по закону:

$$R = R_0\, e^{a/T}, \tag{5}$$

где R_0, a – константы для данного полупроводника, T – температура в градусах Кельвина.

Если провести измерения и построить график $R(T)$, то увидим спадающую с ростом T зависимость, в которой трудно опознать и подтвердить функцию (5).

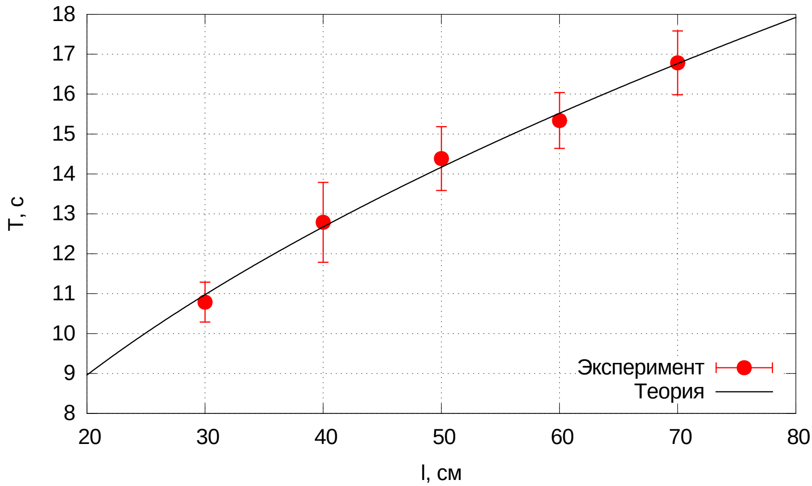

Рис. 1. График зависимости периода колебаний математического маятника T от длины подвеса l

Прологарифмируем (5):

$$\ln R = \ln R_0 + \frac{a}{T}.$$

Введём новые переменные $Y = \ln R$, $X = 1/T$. Обозначим $b = \ln R_0$. Получим линейную зависимость:

$$Y = aX + b.$$

Построим график функции $\ln R = f(1/T)$, т.е. по оси ординат отложим значения $\ln R$, а по оси абсцисс $1/T$.

Если экспериментальные точки расположатся вдоль некоторой прямой, то это будет служить подтверждением справедливости (5). Проводя через эти точки прямую, можно затем по графику сделать оценки a и R_0.

Более точно установить значение a и R_0 можно с помощью метода наименьших квадратов.

8. Метод наименьших квадратов

Это статистический метод анализа экспериментальных данных. В общем случае он позволяет подобрать эмпирическую зависимость, описывающую результаты измерений, или установить по результатам измерений параметры известной зависимости $Y = f(X)$.

В лабораторном практикуме при исследовании и анализе теоретических зависимостей используются приёмы линеаризации. Поэтому, далее будем рассматривать применение метода наименьших квадратов для определения коэффициентов a и b линейной зависимости $Y = aX + b$.

Итак, известно, что параметр Y связан линейной зависимостью с параметром X. Необходимо установить коэффициенты a и b этой зависимости.

Будем полагать, что систематические погрешности отсутствуют, а случайными погрешностями параметра X можно пренебречь по сравнению с погрешностями параметра Y (этот случай достаточно часто встречается в экспериментальной физике).

Проведём измерения параметра Y при n различных значениях параметра X. В результате измерений получим серию парных значений: $(X_1, y_1), (X_2, y_2), (X_3, y_3), \ldots, (X_n, y_n)$. Составим сумму

$$M = \sum_{i=1}^{n} (y_i - a \cdot X_i - b)^2. \tag{6}$$

Из-за погрешностей измерений эта сумма не будет равна нулю, однако при истинных значениях коэффициентов a и b она будет минимальна. При любых других значениях a и b разброс только увеличится и сумма станет больше.

Таким образом, если коэффициенты a и b неизвестны, то их можно найти путём минимизации суммы квадратов отклонений (6). Отсюда и название: *метод наименьших квадратов*.

Указанная сумма $M \geq 0$, поэтому минимум всегда существует и достаточно найти экстремум по a и b. Для этого приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial M}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial b} = 0.$$

Учитывая (6), отсюда получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} X_i \left(y_i - aX_i - b\right) &= 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - aX_i - b) &= 0. \end{aligned}$$

После несложных преобразований приходим к системе так называемых *нормальных уравнений* на параметры a и b,

$$\begin{aligned} a\sum_{i=1}^{n} X_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} X_i &= \sum_{i=1}^{n} X_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} X_i + bn &= \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{aligned}$$

В общем случае, для нелинейной зависимости $Y = f(X)$ ищут минимум суммы квадратов отклонений

$$M = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(X_i)]^2 \tag{7}$$

как функции параметров, определяющих явный вид зависимости $Y = f(X)$. Например, для функции $f(X) = a_1X^3 + a_2X^2 + a_3$ такими параметрами являются a_1, a_2, a_3. Соответствующие расчёты проводятся с помощью вычислительной техники.

Список литературы

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М : Высш. шк., 2005. – 478 с.

Содержание

Учебное издание

Математическая обработка результатов измерений в лабораторном практикуме по курсу общей физики

Учебно-методическое пособие

Составители:
Голицына Ольга Михайловна
Меремьянин Алексей Васильевич
Рисин Виталий Ефимович

В авторской редакции

Подписано в печать 6.10.2015. Формат 60x84/16
Уч.-изд. л. 1,3. Усл. печ. л. 1,2.
Тираж 100 экз. Заказ 759

Издательский дом ВГУ
394030, г. Воронеж, пл. им. Ленина, 10.
Тел. (факс): +7 (473) 259-80-26

Отпечатано в типографии Издательского дома ВГУ
394030, г. Воронеж, ул. Пушкинская, 3. Тел. +7 (473) 220-41-33